Hilfsblätter Folgen und Reihen

Sebastian Suchanek

unter Mithilfe von

Klaus Flittner
Steffen Hofmann
Matthias Staab

Printed with LaTeX

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen

1.1 Definition

Ordnet man jeder natürlichen Zahl ein Element zu, so entsteht eine Folge $a_1, a_2, a_3 ...$ reeller Zahlen. Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder $(a_n)_{n\geq 1}$. Die a_n heißen Glieder der Folge.

1.2 Konvergenz

Eine Folge heißt konvergent mit dem Grenzwert a, wenn für jedes ε alle Folgenglieder ab einem bestimmten Folgenindex N innerhalb der ε-Umgebung von a liegen.

$$|a_n - a| \leq \varepsilon$$

Es gibt genau einen Grenzwert.

1.3 Rechenregeln und Beispiele

1.3.1 Rechenregeln

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |a_n| &= |a| \\
\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n &= c \cdot a \\
\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= a + b \\
\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) &= a \cdot b \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a}{b} && \text{für} b_n, b \neq 0 \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} &= \sqrt{a} && \text{für} a_n \geq 0
\end{aligned}$$

1.3.2 Beispiele

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

1.4 Beschränktheit

Eine Folge heißt nach oben bzw. unten beschränkt, falls jedes Glied der Folge kleinergleich bzw. größergleich als eine bestimmte obere Schranke ist.
Ist eine Folge reeller Zahlen konvergent, so ist sie beschränkt.
Ist eine Folge nach oben beschränkt und monoton steigend oder nach unten beschränkt und monoton fallend, so ist sie konvergent.

1.5 Einschließungskriterium

Sind a_n, b_n und c_n Folgen reeller Zahlen mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ und sind a_n und b_n konvergent mit dem Grenzwert a, so ist auch die Folge c_n mit a konvergent.

1.6 CAUCHY-Kriterium

Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn für jedes ε sich alle Folgenglieder ab einem bestimmten Index $N \in \mathbb{N}$ höchsten um ε unterscheiden.

2 Reihen

2.1 Definition

Ist a_k eine Folge reeller Zahlen, dann heißt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

eine (unendliche) Reihe. Für diese Reihe schreibt man

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ oder } a_0 + a_1 + a_2 + ...$$

Eine Reihe ist eine Folge Partialsummen, der Wert der Reihe ist der Grenzwert der Partialsummen. Der Wert einer Reihe existiert nur, wenn die Reihe konvergent ist.

2.2 CAUCHY-Kriterium

Eine Reihe ist genau dann konvergent, wenn für jedes ε eine Summe der Folgenglieder mit unterer Grenze größer als ein bestimmtes $N \in \mathbb{N}$ kleiner als ε ist.

2.3 LEIBNIZ-Kriterium

Gilt in der alternierenden Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 \pm ...$$

$b_k \geq 0$, $b_{k+1} \leq b_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ sowie $\lim_{k \to \infty} b_k = 0$, ist die Reihe konvergent.
Es gelten die Abschätzungen

$$|s_n - s| \leq b_{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

$$|s_{2m+1} \leq s \leq s_{2m}, n \in \mathbb{N}$$

2.4 Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent* falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ der Beträge der Glieder konvergent ist.
Tritt Konvergenz nun ohne Betragsbildung der Reihenglieder ein, nennt man die Reihe *konvergent*.

2.5 Majoranten-Kriterium

In der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gelte $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist die Reihe b_k konvergent, dann ist die Reihe a_k absolut konvergent.

2.6 Quotientenkriterium

Falls für $0 \leq qle1$ und $k \geq N$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q,$$

so ist a_k konvergent. Gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k + 1}{a_k} \right| \geq 1$$

Für $q = 1$ kann die Reihe konvergent oder divergent sein.

2.7 Wurzelkriterium

Gilt für

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q$$

$q \leq 1$, so ist die Reihe konvergent, für ≥ 1 ist die Reihe divergent. Für $q = 1$ kann die Reihe konvergent oder divergent sein.

2.8 Rechenregeln

Sind a_k, b_k zwei konvergente Reihen, so gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha \cdot a_k + \beta \cdot b_k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

CAUCHYprodukt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_n \quad \text{mit } c_n = a_0 b_n + a_1 b_n - 1 + ... + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot b_{n-k}$$

3 Funktionenfolgen und -Reihen

3.1 Definition

Ordnet man jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion zu, so entsteht eine Funktionenfolge. Die Folge der entsprechenden Partialsummen nennt man Funktionenreihe.

3.2 Punktweise Konvergenz

3.2.1 Funktionenfolge

Die Funktionenfolge f_n heißt auf D punktweise konvergent, wenn für alle x die Folge $f_n(x)$ konvergiert.
Ist f_n punktweise konvergent, so heißt $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ Grenzfunktion der Funktionenfolge.

3.2.2 Funktionsreihe

Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt punktweise konvergent, wenn für alle x die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert. Ist die Funktionenreihe punktweise konvergent, so heißt die Funktion $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ die Summe der Funktionsreihe.

3.3 Gleichmäßige Konvergenz

3.3.1 Funktionenfolge

Die Funktionenfolge $f_n(x)$ heißt auf D gleichmäßig konvergent gegen die Grenzfunktion $f(x)$, wenn sich ab einem bestimmten Index $N \in \mathbb{N}$ für alle x die Folgenglieder $f_n(x)$ von $f(x)$ höchstens um ε unterscheiden.
Die Funktionenfolge f_n ist auf D genau dann gleichmäßig konvergent gegen f, wenn

$$\lim_{n\to\infty} [\sup |f_n(x) - f(x)|] = 0.$$

3.3.2 Funktionenreihe

Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt auf D gleichmäßig konvergent, wenn die Folge Ihrer Partialsummen auf D gleichmäßig konvergiert.
In der Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf D gelte $|f_n(x)| \leq c_n$ für alle $x \in D$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ reeller Zahlen sei konvergent. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig auf D.

3.4 Stetigkeit

f ist stetig, wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert und f_n stetig ist. Analoges gilt für Funktionenreihen.

3.5 Integrierbarkeit

f ist integrierbar auf $[a, b]$, falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergent ist und f_n integrierbar ist. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Analog gilt bei Reihen:

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] dx$$

3.6 Differentiation

f ist differenzierbar auf I, wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf I konvergent ist und f_n stetig differenzierbar ist. Dann gilt:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]'$$

Analog gilt bei Reihen:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]'$$

4 Potenzreihen

4.1 Definition

Ist a_n eine Folge reller Zahlen und ist $x_0 \in \mathbb{R}$, so heißt die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

eine *Potenzreihe* um x_0. Die a_n heißen Koeffizienten der Potenzreihe.

4.2 Konvergenz

Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergent für $x = r$ mit $r \neq 0$, so ist die Reihe absolut konvergent für alle x innerhalb des Konvergenzradius r ($|x| \geq |r|$). Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ divergent für ein $x = s$, so ist die Reihe divergent für alle $|x| > |s|$.

4.3 Quotientenkriterium

Existiert

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = b$$

mit $0 \leq b \leq \infty$, so ist b der Konvergenzradius.

4.4 Wurzelkriterium

Existiert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = c$$

mit $0 \leq c \leq \infty$, so ist der Konvergenzradius gleich $\frac{1}{c}$.

4.5 Differentiation, Integration

Jede Potenzreihe ist auf dem Intervall des Konvergenzradius differenzierbar und integrierbar. Das Ergebnis hat jeweils den selben Konvergenzradius.

4.6 Rechenregeln

Für alle x mit $|x| \leq \min(\varrho_a, \varrho_b)$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) \cdot x^n$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n \quad \text{mit } c_n = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_n - 1 + ... + a_n \cdot b_0$$

5 Taylorreihe

Ist eine Funktion $n + 1$-mal stetig differenzierbar, dann gilt

$$f(x) = T_n(x, x_0) + R_n(x, x_0)$$

mit dem Taylor-Polynom

$$T_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

un dem Restglied

$$R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{n+1}(t) dt.$$

Für das Restglied ist weiters die Darstellung von Lagrange

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x + \vartheta(x - x_0))}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

und die Darstellung von Cauchy

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x + \vartheta(x - x_0))}{n!}(1 - \vartheta)^n (x - x_0)^{n+1}$$

(jeweils mit $0 \leq \vartheta \leq 1$) möglich.