Hilfsblätter Lineare Algebra

Sebastian Suchanek

unter Mithilfe von

Klaus Flittner
Matthias Staab

Printed with LaTeX

Inhaltsverzeichnis

1 Vektoren **1**
1.1 Norm . . . 1
1.2 Addition, Mulitplikation . . . 1
1.2.1 Addition . . . 1
1.2.2 Multiplikation mit einem Skalar . . . 1
1.2.3 Skalarprodukt . . . 1
1.2.4 Vektorprodukt . . . 1
1.2.5 Spatprodukt . . . 2

2 Matrizen **2**
2.1 Besondere Matrizen . . . 2
2.2 Addition, Multiplikation . . . 2
2.2.1 Addition . . . 2
2.2.2 Multiplikation . . . 2
2.3 Determinaten . . . 3
2.3.1 2×2–Matrix . . . 3
2.3.2 3×3–Matrix (Regel von Sarrus) . . . 3
2.3.3 $n \times n$–Matrix . . . 3
2.4 Lösungsalgorithmen für lineare Gleichungssysteme . . . 3
2.4.1 Gausssches Eliminationsverfahren . . . 4
2.4.2 Cramersche Regel . . . 4
2.5 Besondere Eigenschaften von Matrizen und besondere Matrizen-Paare . . . 4
2.5.1 Inverse . . . 4
2.5.2 Transponierte . . . 4
2.5.3 Konjugierte . . . 4
2.5.4 Orthogonale Matrix . . . 5
2.5.5 Symmetrie, Schiefsymmetrie, Zerlegung . . . 5
2.5.6 Dimension . . . 5
2.5.7 Rang . . . 5
2.6 Eigenwerte . . . 6
2.7 Eigenvektoren . . . 6
2.8 Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren . . . 6
2.9 Hauptachsentransformation . . . 6

3 Lineare Abbildungen **6**
3.1 Linearität . . . 6
3.2 Bild . . . 7
3.3 Kern . . . 7
3.4 Dimension . . . 7

1 Vektoren

1.1 Norm

Die sog. *Euklidische Norm* entspricht der Länge eines Vektors $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ gemäß

$$||\vec{a}|\,| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

bei $\vec{a} \in \mathbb{C}^n$ gilt analog

$$||\vec{a}|\,| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i a_i^*}$$

Beispiel, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$||\vec{a}|\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

1.2 Addition, Mulitplikation

1.2.1 Addition

Zeilenweise Addition der Komponenten. Beispiel ($\vec{a}, \vec{b}, \in \mathbb{R}^3$):

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Multiplikation mit einem Skalar

Multiplikation des Skalars $\lambda \in \mathbb{R}$ mit jeder Komponenten. Beispiel ($\vec{a} \in \mathbb{R}^3$):

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

1.2.3 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist eine „eindimensionaler“ Wert (=Skalar) ($a, b \in \mathbb{R}^n$):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \mathrel{\hat{=}} \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$$

Beispiel mit $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

1.2.4 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ erzeugt einen dritten Vektor $\vec{c}$, der senkrecht auf dem Parallelogramm steht, welches von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Seine Länge entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms. Berechnet wird er wie folgt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e^1} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{e^2} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e^3}$$

mit

$$\vec{e^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2.5 Spatprodukt

Das Spatprodukt dreier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ entspricht dem Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten „Spats“:

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2)$$

2 Matrizen

2.1 Besondere Matrizen

Eine $n \times n$–Matrix A folgender Art nennt man *Diagonalmatrix*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & & \\ 0 & 0 & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Einen Sonderfall *Einheitsmatrix* E oder I (falls in $\mathbb{C}^n$ gearbeitet wird):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Multiplikation mit der sog. *Drehmatrix* werden Vektoren $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel φ gedreht, ohne deren Länge zu ändern:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

2.2 Addition, Multiplikation

2.2.1 Addition

Elementweise Addition der Matrizen. Beispiel (A, B als 3×3–Matrix):

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

2.2.2 Multiplikation

Die Multiplikation zweier Matrizen A und B ist nur möglich, wenn sie dem Schema $A \in M_{(m\times n)}, B \in M_{(n\times p)}$ genügen, also die Spaltenanzahl des linken gleich der Zeilenzahl des rechten Faktors ist.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{mp} + a_{m2}b_{mp} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

d.h., die Komponenten werden bei der linken Matrix zeilen- und bei der rechten Matrix spaltenweise miteinander multipliziert und addiert. Die Matrizen-Multiplikation ist im Allgemeinen *nicht* kommutativ, d.h. $AB \neq BA$.

2.3 Determinaten

Folgende Kurzschreibweise ist möglich:

$$\det(A) \mathrel{\hat{=}} |A|$$

2.3.1 2×2–Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2.3.2 3×3–Matrix (Regel von Sarrus)

Addition der drei fallenden und Subtraktion der drei steigenden Diagonalen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

2.3.3 $n \times n$–Matrix

Rekursive Berechnung durch Entwicklung nach einer beliebigen Zeile oder Spalte. Zweckmäßig ist dabei die Wahl einer Spalte, die möglichst viele 0 enthält. Die daraus entstehenden Matrizen werden mit der Komponente, nach der Entwickelt wurde, multipliziert und addiert. Ist die Summe aus x- und y-„Position“ des Matrix-Elementes, nach dem entwickelt wurde, gerade, so erhält die neue Matrix eine positives Vorzeichen. Ist die Summe ungerade, ein negatives. Das Enwtickeln nach einem Matrizen-Element geschieht dadurch, daß man von der ursprünglichen Matrix sowohl die komplette Zeile als auch die komplette Spalte, in welcher das Element steht, wegfallen läßt.
Beispiel (Entwicklung nach der ersten Spalte):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

2.4 Lösungsalgorithmen für lineare Gleichungssysteme

Für ein Gleichungssystems des Typs $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in M_{n \times n}, vecb, vecx \in \mathbb{R}^n$ gibt es u.a. folgende Lösungsverfahren:

2.4.1 GAUSSsches Eliminationsverfahren

Beispiel $n = 3$: Man notiert das Gleichungssystem in folgender Form:

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}$$

Dieses System wird nun durch Zeilenoperationen (Addition von Vielfachen der Zeilen oder Vertauschen von Zeilen) so umgeformt, daß sich links eine sog. Dreiecksmatrix ergibt:

$$\begin{array}{ccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & x_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & x_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & x_3 \end{array}$$

Hier kann nun direkt abgelesen werden, daß $x_3 = c_{33}$. Entsprechend können durch Einsetzen von unten nach oben x_2 und x_3 bestimmt werden.

2.4.2 CRAMERsche Regel

Falls für die Determinate $D = \det(A) \neq 0$ gilt, kann die *Cramersche Regel* angewandt werden. Dabei gilt für die Lösungen $x_1 \ldots x_n$:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ \ldots, \ x_n = \frac{D_n}{D}$$

wobei $D_1 \ldots D_n$ die Determinaten der Matrizen sind, die entstehen, wenn jeweils der n-te Spaltenvektor von A durch $\vec{b}$ ersetzt werden.

2.5 Besondere Eigenschaften von Matrizen und besondere Matrizen-Paare

2.5.1 Inverse

Die Inverse A^{-1} zu Matrix A ist diejenige Matrix, die mit A multipliziert die Einheitsmatrix E ergibt. Bestimmungsalgorithmus am Beispiel einer 3×3–Matrix: Man notiert neben die Matrix A die Einheitsmatrix:

$$\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Dieses System wird nun durch Zeilenoperationen (Addition von Vielfachen der Zeilen) so umgeformt, daß sich links eine Einheitsmatrix ergibt:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}$$

Die so auf der rechten Seite entstandene Matrix B entspricht A^{-1}.

2.5.2 Transponierte

Als *Transponierte* A^T einer Matrix A bezeichnet man die Matrix, die entsteht, wenn die A an der Hauptdiagonalen gespiegelt wird. Dabei wird aus einer $n \times m$–Matrix ($n \neq m$) eine $m \times n$–Matrix.

2.5.3 Konjugierte

Enthält eine Matrix A komplexe Elemente ($a_{nm} \in \mathbb{C}$, also $a_{nm} = x + iy$), so erhält man die *konjugierte Matrix* A^*, indem man die komplexen Elemente konjugiert, also die Vorzeichen der Imaginärteile umkehrt.

2.5.4 Orthogonale Matrix

Eine Matrix A, welche die Beziehungen

$$A^T = A^{-1}\text{und/oder}AA^T = A^T A = E$$

erfüllt, nennt man *orthogonale Matrix*. Weiters ergibt das Skalarprodukt zweier beliebiger Zeilen oder Spalten stets den Wert 0, das Skalarprodukt einer Zeile oder Spalte mit sich selbst 1. Außerdem gilt

$$\det(A) = \pm 1$$

2.5.5 Symmetrie, Schiefsymmetrie, Zerlegung

Gilt für eine $n \times n$–Matrix A für alle ihre Elemente die Beziehung

$$A = A^T$$

bezeichnet man sie als *symmetrisch*, d.h. es gilt $a_{xy} = a_{yx}$. Gilt dagegen

$$A = -A^T$$

bezeichnet man die Matrix als *schiefsymmetrisch* und es gilt $a_{xy} = -a_{yx}$ sowie $a_{xx} = 0$.
Jede Matrix A läßt sich in eine symmetrische Matrix A_S und eine schiefsymmetrische Matrix A_{SS} zerlegen, so daß gilt:

$$A = A_S + A_{SS}$$

Dabei gilt:

$$A_S = \frac{1}{2}(A + A^T) \quad \text{und} \quad A_{SS} = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

2.5.6 Dimension

Die *Dimension* einer Matrix ist die Gesamtzahl ihrer Zeilenvektoren. (Ähnliches gilt für Vektorräume und Lineare Abbildungen.)

2.5.7 Rang

Der Rang einer Matrix ist die Anzahl linear unabhängiger Zeilen, also die Dimension (Anzahl der Zeilen) des Bildes der Matrix.
Eine einfache Möglichkeit zur Berechnung ist, die Matrix durch elementare Umformungen in eine Trapezmatrix

$$\begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \cdots & b_{1n} \\
0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \cdots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & b_{rr} & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \cdots & b_{rn} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

umzuformen. Folgende elementaren Umformungen sind für die Berechnung des Ranges erlaubt:

- Zwei Zeilen oder Spalten miteinander vertauschen.
- Multiplikation mit einem Skalar ungleich Null.
- Addition oder Subtraktion zweier Zeilen oder Spalten.

2.6 Eigenwerte

Aus der Gleichung

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

mit $A \in M_{(n\times n)}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ erhält man als Lösung

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda E_n)$$

welches als das *charakteristische Polynom* bezeichnet wird. Alle Nullstellen $\lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{C}$ dieses Polynoms nennt man *Eigenwerte* der Matrix A. Beispiel für eine 3×3-Matrix:

$$\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{31}(a_{22}-\lambda)a_{13} - a_{32}a_{23}(a_{11}-\lambda) - (a_{33}-\lambda)a_{21}a_{12} \stackrel{!}{=} 0$$

2.7 Eigenvektoren

Sind $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ Eigenwerte der Matrix A, so nennt man alle Vektoren v_i mit der Eigenschaft

$$(A - \lambda_i E)v_i = 0$$

Eigenvektoren der Matrix A. D.h., es gibt *mindestens* soviele Eigenvektoren wie Eigenwerte.

2.8 Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Mit dem Schmidt*schen Orthogonalisierungsverfahren* wird eine Basis von n Vektoren $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n \in \mathbb{C}^n$ so umgeformt, daß eine neue Basis entsteht,die den selben Raum wie die ursprüngliche Basis aufspannen und deren Vektoren alle die Länge 1 besitzen und senkrecht aufeinander stehen. Vorgehen:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{||\vec{v}_1||}$$

$$\vec{u}_{l+1} = \frac{v_{l+1} - < v_{l+1}, u_1 > u_1 - \ldots - < v_{l+1} u_l > u_l}{||v_{l+1} - < v_{l+1}, u_1 > u_1 - \ldots - < v_{l+1} u_l > u_l||}$$

2.9 Hauptachsentransformation

Zu jeder symmetrischen Matrix A gibt es eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D mit

$$A = UDU^T$$

Dabei entsprechen die Elemente von D den Eigenwerten von A und die Spaltenvektoren von U den normierten Eigenvektoren von A. Die Formulierung

$$D = UAU^T$$

bezeichnet man dabei als *Hauptachsentransformation*.

3 Lineare Abbildungen

3.1 Linearität

Eine Abbildungsvorschrift L wird als *linear* bezeichnet, falls folgende Gleichung erfüllt ist:

$$L(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2) = \lambda_1 L(\vec{x}_1) + \lambda_2 L\vec{x}_2)$$

mit $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

3.2 Bild

Das Bild einer Abbildungsvorschrift entspricht dem Vektorraum, in dem alle möglichen Ergebnisse der Abbildung liegen. Dabei werden alle linear abhängigen „Zeilen“ weggelassen. Der Rang des Bildes entspricht dem Rang der Matrix der Abbildungsvorschrift.

3.3 Kern

Die Lösung $\vec{x}$ der Gleichung

$$L \cdot \vec{x} = 0$$

bezeichnet man als *Kern* der Abbildung L. D.h. der Kern entspricht sozusagen den „Nullstellen“ der Abbildung.

3.4 Dimension

Ähnlich wie für Matrizen ist auch für Vektorräume und Lineare Abbildungen ein *Dimensions*begriff definiert. Dabei gilt die Beziehung

$$\dim\left(\,\mathrm{Kern}(L)\,\right) + \dim\left(\,\mathrm{Bild}(L)\,\right) = \dim(L)$$